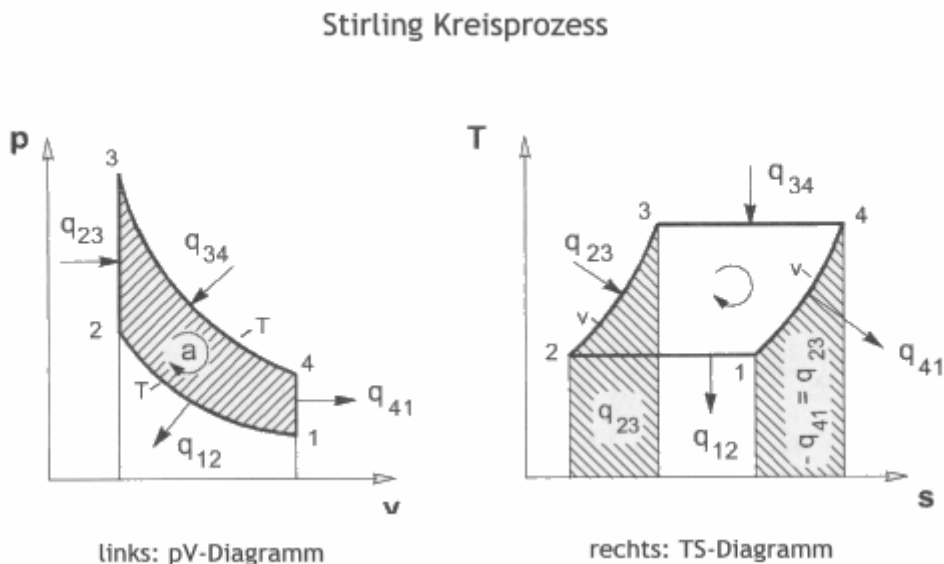


## Thermodynamische Berechnung des Modells eines Stirling-Motors Typ b

Zu 1.) Übertragen Sie das gegebene p-V-Diagramm in ein entsprechendes T-s-Diagramm und erklären Sie die Vor- und Nachteile. Warum sollte man beide Diagramme zusammen für den Prozess betrachten?



<http://de.wikibooks.org/wiki/Stirlingmotoren>

(Achtung: Der Kreisprozesses ist anders nummeriert)

Die Flächen in einem p-V-Diagramm stellen die spezifischen Arbeiten des eingeschlossenen Gases dar.

Die Flächen in einem T-s-Diagramm stellen die spezifischen Wärmemengen (Wärmeenergien) des eingeschlossenen Gases dar. Das Wort spezifisch bedeutet hier: bezogen auf eine Umdrehung.

Da bei der Betrachtung eines Kreisprozesses bei Größen wie Arbeit und Energie gleichzeitig betrachtet werden müsse, ergänzen sich beide Diagramme.

Zu 2.) Errechnen Sie das Volumen des eingeschlossenen Arbeitsgases in  $\text{cm}^3$

- a) im unteren Totpunkt des Arbeitskolbens
- b) im oberen Totpunkt des Arbeitskolbens

zu a)  $V_1 = V_{\text{Haupt}} + V_{\text{Arb,UT}}$

Volumen des Gases im Hauptzylinder  $V_{\text{Haupt}} = V_{\text{Zyl}} - V_{\text{Verd}}$

$$V_{Haupt} = V_{Zyl} - V_{Verd} = \frac{D^2 \cdot \pi}{4} * h_{Zyl} - \frac{D^2 \cdot \pi}{4} * h_{Verd} = \frac{D^2 \cdot \pi}{4} * (h_{Zyl} - h_{Verd})$$

$$V_{Haupt} = \frac{(12cm)^2 * \pi}{4} * (1,6cm - 0,8cm) = 90,478cm^3$$

$$V_{Arb,UT} = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} * h_{Arb,UT}$$

$$V_{Arb,UT} = \frac{(2cm)^2 * \pi}{4} * 1,6cm = 5,027cm^3$$

$$V_1 = V_{Haupt} + V_{Arb,UT} = 90,478cm^3 + 5,027cm^3 = 95,505cm^3 [1]$$

zu b)

Das Gasvolumen im Hauptzylinder bleibt gleich, denn es wird vom Verdrängerkolben lediglich mal in die warme und mal in die kalte Zone verschoben also  $V_{Haupt} = 90,478cm^3 = const.$

Nur das Volumen des Arbeitszylinders vergrößert sich, weil der Arbeitskolben sich von UT nach OT bewegt, Hub  $s = 2 \times r = 2 \times 4mm = 8mm$

$$V_{Arb,OT} = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} * h_{Arb,OT}$$

$$V_{Arb,OT} = \frac{(2cm)^2 * \pi}{4} * 2,4cm = 7,540cm^3$$

$$V_2 = V_{Haupt} + V_{Arb,OT} = 90,478cm^3 + 7,540cm^3 = 98,018cm^3 [2]$$

3.) Bestimmen Sie das Verdichtungsverhältnis des Modells

$$\varepsilon = \frac{V_2}{V_1}$$

$$\varepsilon = \frac{98,018cm^3}{95,505cm^3} = 1,026 [3]$$

Im Vergleich: Ein Otto-Motor hat ein  $\varepsilon \approx 11$  und Diesel-Motor  $\varepsilon \approx 22$

**Zu 4. Der Gaszustand in den vier Punkten**

**4.1. Gaszustand im unteren Totpunkt : Punkt 1**

**4.1a) Gasvolumen  $V_1$  im Punkt 1 (unteren Totpunkt UT)**

siehe Ergebnis von 2a)  $V_1 = 95,505cm^3$  aus [1]

**4.1b.) Druck  $p_1$  im Punkt 1 (unterer Totpunkt) bei oberer Temperatur  $T_o$**

Beim Warten auf Betriebstemperatur im Modell bewegen sich die Kolben nicht, also isochorer Zustandsänderung

$$\frac{p_L * V_1}{T_L} = \frac{p_1 * V_1}{T_1} \xrightarrow{\text{da isochor}} \frac{p_L}{T_L} = \frac{p_1}{T_1} \longrightarrow p_1 = \frac{p_L}{T_L} * T_1$$

$$p_1 = \frac{1\text{bar} * 373\text{K}}{293\text{K}} = 1,273\text{bar}[4]$$

**4.1c) Die Temperatur T<sub>1</sub> im Punkt 1 (unterer Totpunkt) bei oberer Temperatur T<sub>o</sub>**

Laut Aufgabe ist  $\vartheta_0 =$  obere Betriebs-Temperatur T<sub>o</sub> in der warmen Zonen = 100°C → T<sub>o</sub>=373K (siedenes Wasser bei p<sub>n</sub>=1,013bar). Das entspricht

T<sub>1</sub>=373K const.

**4.1d) Zusammenfassung**

Nr.	p inbar	V incm3	T in K	Bemerkung
1	1,273	95,505	373	Anfangszustand
2				
3				
4				

**4.2. Gaszustand im oberen Totpunkt : Punkt 2 bei oberer Temperatur T<sub>o</sub>**

**4.2a) Gasvolumen V<sub>2</sub> im Punkt 2 (oberer Totpunkt OT) V<sub>2</sub>=V<sub>Haupt</sub> + V<sub>Arb,OT</sub>**

siehe Ergebnis von 2b) V<sub>2</sub> = 98,018cm<sup>3</sup> aus [2]

**4.2b.) Druck p<sub>2</sub> im Punkt 2 (oberer Totpunkt) bei oberer Temperatur T<sub>o</sub>**

Da von 1 nach 2 eine Isotherme Zustandsänderung vorliegt ist T<sub>2</sub> = T<sub>1</sub> = 373K const.

$$\frac{p_1 * V_1}{T_1} = \frac{p_2 * V_2}{T_2} = \frac{p_1 * V_1}{T_1} = \frac{p_2 * V_2}{T_1} \longrightarrow p_2 = \frac{p_1 * V_1}{V_2}$$

$$p_2 = \frac{1,273\text{bar} * 95,505\text{cm}^3}{98,018\text{cm}^3} = 1,240\text{bar}[5]$$

**4.2c) Die Temperatur T<sub>2</sub> im Punkt 2 (oberer Totpunkt)**

Da von 1 nach 2 eine isotherme Zustandsänderung vorliegt ist

T<sub>2</sub> = T<sub>1</sub> = 373K const. [6]

**4.2d) Zusammenfassung**

Nr.	p inbar	V incm3	T in K	Bemerkung
1	1,273	95,505	373	Anfangszustand
2	1,240	98,018	373	Isotherme Expansion von 1 nach 2
3				
4				

**4.3. Gaszustand im oberen Totpunkt : Punkt 3 bei unterer Temperatur Tu**

**4.3a) Gasvolumen V<sub>3</sub> im Punkt 3 (oberer Totpunkt OT)**

Da von 2 nach 3 eine isochore Zustandsänderung vorliegt, ist

$$V_3 = V_2 = 98,018\text{cm}^3 \quad [7] \quad \text{aus [2]}$$

**4.3b.) Druck p<sub>3</sub> im Punkt 3 (oberer Totpunkt) bei unterer Temperatur Tu**

Im Punkt 3 herrscht laut Annahme die niedrigere Temperatur  $t_3=30^\circ\text{C} \Rightarrow T_3 = 303\text{K}$  aus [8] und es ist eine isochore Zustandsänderung

$$\frac{p_2 * V_2}{T_2} = \frac{p_3 * V_3}{T_3} \xrightarrow{\text{isochore}} \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} \longrightarrow p_3 = \frac{p_2 * T_3}{T_2}$$
$$p_3 = \frac{1,240\text{bar} * 303\text{k}}{373\text{K}} = 1,007\text{bar} [9]$$

**4.3c) Die Temperatur T<sub>3</sub> im Punkt 3 (oberer Totpunkt) bei unterer Temperatur Tu**

Im Punkt 3 hat das Gas das gleiche Volumen wie bei 2 ( isochore  $V_2=V_3=98,018\text{cm}^3$  aber die Temperatur in der kälteren Zone also

$$T_3 = 303 \text{ K aus [8]}$$

**4.3d) Zusammenfassung**

Nr.	p inbar	V incm3	T in K	Bemerkung
1	1,273	95,505	373	Anfangszustand
2	1,240	98,018	373	Isotherme Expansion von 1 nach 2
3	1,007	98,018	303	Isochore Abkühlung von 2 nach 3
4				

**4.4. Gaszustand im unteren Totpunkt : Punkt 4 bei unterer Temperatur Tu**

**4.4a) Gasvolumen V<sub>4</sub> im Punkt 4 (untere Totpunkt UT)**

Im unteren Totpunkt hat das Gas das gleiche Volumen wie bei 1 also

$$V_4=V_1 = 95,505\text{cm}^3 \quad \text{aus [1]}$$

**4.4b.) Druck p<sub>4</sub> im Punkt 4 (unterer Totpunkt) bei unterer Temperatur Tu**

Da von 3 nach 4 eine Isotherme Zustandsänderung vorliegt ist  $T_4 = T_3 = 303\text{K const. Aus [8]}$

$$\frac{p_3 * V_3}{T_3} = \frac{p_4 * V_4}{T_4} \xrightarrow{\text{isotherm}} = \frac{p_3 * V_3}{T_3} = \frac{p_4 * V_4}{T_4} \longrightarrow p_4 = \frac{p_3 * V_3}{V_4}$$

$$p_4 = \frac{1,007\text{bar} * 98,018\text{cm}^3}{95,505\text{cm}^3} = 1,033\text{bar} [10]$$

**4.4c) Die Temperatur T<sub>4</sub> im Punkt 4 (unterer Totpunkt) bei unterer Temperatur T<sub>u</sub>**

Da von 3 nach 4 eine isotherme Zustandsänderung vorliegt ist

$$T_4 = T_3 = 303\text{K const. Aus [8]}$$

**4.4d) Zusammenfassung**

Nr.	p inbar	V incm3	T in K	Bemerkung
1	1,273	95,505	373	Anfangszustand
2	1,240	98,018	373	Isotherme Expansion von 1 nach 2
3	1,007	98,018	303	Isochore Abkühlung von 2 nach 3
4	1,033	95,505	303	isotherme Kompression von 3 nach 4
				isochore Erwärmung von 4 nach 1 und der Anfangszustand ist wieder erreicht

Zu 5.) Bestimmen sie die spezifische Kreisprozessarbeit in Nm/U

Es wird nur Arbeiten verrichtet von 1 nach 2 (Isotherme) und von 3 nach 4 (auch Isotherme).

In den Zuständen 4 nach 1 und 2 nach 3 (Isochore) ist die Gasarbeit Null da ΔV = 0 ist

$$w_{12} = p_1 * V_1 * \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$w_{12} = 1,273 * 10^5 \text{ Pa} * 95,505 * 10^{-6} \text{ m}^3 * \ln \frac{98,018\text{cm}^3}{95,505\text{cm}^3} = 0,316\text{Nm} / \text{U} [11]$$

(Hinweis: Diese Arbeit wird bei jeder Umdrehung, während der isothermen Expansion frei, also dem System „Schwungscheibe“ zugeführt )

$$w_{34} = p_3 * V_3 * \ln \frac{V_4}{V_3}$$

$$w_{34} = 1,007 * 10^5 \text{ Pa} * 98,018 * 10^{-6} \text{ m}^3 * \ln \frac{95,505\text{cm}^3}{98,018\text{cm}^3} = -0,256\text{Nm} / \text{U} [12]$$

(Hinweis: Die Vorzeichen sagen: positiv = Arbeit wird frei

negativ = Arbeit muss dem Arbeitsgas zugeführt werden

D.h. die Arbeit w<sub>34</sub> wird bei jeder Umdrehung, während der isothermen Kompression, dem System „Schwungscheibe“ entzogen und dem Arbeitskolben zugeführt um das Arbeitsgas in den Ausgangszustand UT zu verdichten )

Die theoretische nutzbare Kreisprozessarbeit ist also bei jeder Umdrehung: w = w<sub>12</sub> + w<sub>34</sub>

$$w = 0,316\text{Nm} / \text{U} + (-0,256\text{Nm} / \text{U}) = 0,06\text{Nm} / \text{U} [13]$$

Zu 6.) Ermitteln Sie die thermisch theoretische Leistung des Modells in W

Die theoretisch abgegebene Leistung  $P_o$  ist

$$P_o = w \cdot n/60 = 0,06 \text{ Nm/U} \cdot 150 \text{ U}/(60 \text{ s}) = 0,15 \text{ Nm/s} = 0,15 \text{ W} \quad [14]$$

Zu 7.) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis unter 6) mit der empirischen Formel nach nach Prof. Ivo

Für die abgegebene thermische Leistung gibt Prof. Ivo Kolin folgende empirische Formel an:

$$N = \frac{V \cdot \Delta T^3}{2 \cdot 10^8}$$

$N$  = Wellenleistung in kW

$V$  = kleinstes Arbeitsvolumen in  $\text{dm}^3$  oder Liter,

wobei alle Toträume abgezogen werden sollten.  $V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Verdränger}}$

$\Delta T$  = Temperaturdifferenz in [Kelvin](#) ( $\Delta T = T_{\text{max}} - T_{\text{min}}$ )

$T_{\text{max}}$  = maximal Temperatur ( $T_3$  im PV Diagramm) in Kelvin

$T_{\text{min}}$  = minimal Temperatur ( $T_1$  im PV Diagramm) in Kelvin

Diese Formel wird auf das Modell angewendet: Es bedeutet: Das  $V$  hier entspricht unserem  $V_1 = 95,505 \text{ cm}^3 = 95,505 \cdot 10^{-3} \text{ dm}^3$  aus [1]

$$\Delta T = 373 \text{ K} - 303 \text{ K} = 70 \text{ K}$$

$$N = \frac{95,505 \cdot 10^{-3} \cdot 70^3}{2 \cdot 10^8} = 1,638 \cdot 10^{-4} \text{ kW} = 0,164 \text{ W}$$

Es liegt eine gut Übereinstimmung zwischen der bisherigen thermodynamischen Rechnung und der empirischen Formel nach Prof. Ivo Kolin vor.  $N = 0,164 \text{ W} \approx P_o = 0,15 \text{ W}$  aus [14]

Zu 8.) Berechnen Sie die zugeführte spezifische Wärme in J/U

Es wird von 4 nach 1 (Isochore Erwärmung  $q_{41}$ ) und von 1 nach 2 (isotherme Expansion  $q_{12}$ ) Wärme zugeführt. Diese sind im Einzelnen:

$$q_{12} = w_{12} = 0,316 \text{ Nm/U} = 0,316 \text{ J/U} \quad [15] \quad \text{aus [11]}$$

$$q_{41} = m * c_v * (T_1 - T_4)$$

mit

$$p_1 * V_1 = m * R_L * T_1 \longrightarrow m = \frac{p_1 * V_1}{R_L * T_1}$$

und

$$c_v = \frac{R_L}{\gamma - 1}$$

$$c_v = \frac{287,14 \frac{Nm}{kg * K}}{1,401 - 1} = 716,06 \frac{J}{kg * K} [16]$$

$$m = \frac{1,273 * 10^5 Pa * 95,505 * 10^{-6} m^3}{287,14 \frac{Nm}{kg * K} * 373K} = 1,135 * 10^{-4} kg = 0,1135g [17]$$

$$q_{41} = 1,135 * 10^{-4} kg * 716,06 \frac{J}{kg * K} * (373K - 303K) = 5,77J / U [18]$$

$$\text{somit ist } q_{zu} = q_{41} + q_{12} = 5,770 J/U + 0,316 J/U = 6,086 J/U [19]$$

Zu 9) Ermitteln Sie den thermisch theoretischen Wirkungsgrad  $\eta_{th}$

Hier wird zunächst von dem vorgegebenen idealen Kreisprozess ausgegangen. Dann ist

$$\eta_{th} = \frac{w}{q_{zu}}$$

$$\eta_{th} = \frac{0,06 Nm / U}{6,086 J / U} = 9,859 * 10^{-3}$$

$$\eta_{th} = 0,9859\% \approx 1\% [20]$$

Der thermisch theoretische Wirkungsgrad  $\eta_{th}$  beträgt also knapp 1%

Zu 10) Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wirkungsgrad eines Carnot-Prozess  $\eta_{Carnot}$  in %

Der Wirkungsgrad wäre beim Carnot-Prozess

$$\eta_{Carnot} = \frac{T_1 - T_3}{T_1}$$

$$\eta_{Carnot} = \frac{373K - 303K}{373K} = 0,188$$

$$\eta_{Carnot} = 18,8\% [21]$$

Also hat das Modell nur einen Wirkungsgrad von ca. 1% gegenüber dem des Carnot-Prozess von 18,8%

Zu 11) Gründe für die Verluste und abgegebene thermische Leistung

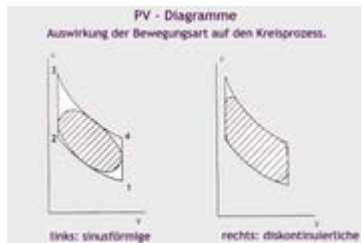
Die theoretische Leistung entspricht nicht der wirklich abgegeben Leistung. Die Gründe sind (nach Wikipedia <http://de.wikibooks.org/wiki/Stirlingmotoren> )

### **Gründe für die Verluste**

(Einige) Gründe, warum der reale Prozess vom idealen abweicht:

- *Dissipation durch mechanische Reibung*
- *Eine diskontinuierliche Kolbensteuerung ist nur begrenzt realisierbar.*

Um den Wirkungsgrad zu verbessern (der Prozess wird in den Ecken besser ausgefahren) und **Totraum** so klein wie möglich zu halten, ist eine diskontinuierliche Kolbensteuerung sinnvoll. Der Nachteil ist höherer Verschleiß durch mechanische Belastung und die Geräuschentwicklung.



- *Gasgeschwindigkeit ist zu hoch, dadurch werden isotherme Zustandsänderungen nur schlecht realisiert*
- *Regeneratorwirkungsgrad von 100 % wird nicht erreicht*
- *Totraumeffekte*

Im Idealfall befindet sich das gesamte Arbeitsmedium (Gas) im Expansions- und Kompressionsraum. Selbst bei bis 1999 realisierten Motoren beträgt der Totraum noch ca. 30 bis 50 % des Gesamtvolumens. Meistens befinden sich in diesen Toträumen (auch Schadräumen genannt) die Wärmetauscheraggregate wie Erhitzer, Regeneratoren, Kühler. Dadurch geänderte Volumenverhältnisse bringen auch veränderte Druckverhältnisse mit sich, die sich sehr negativ auf den Gesamtwirkungsgrad auswirken.

- *Wärmeverlust durch das Material*

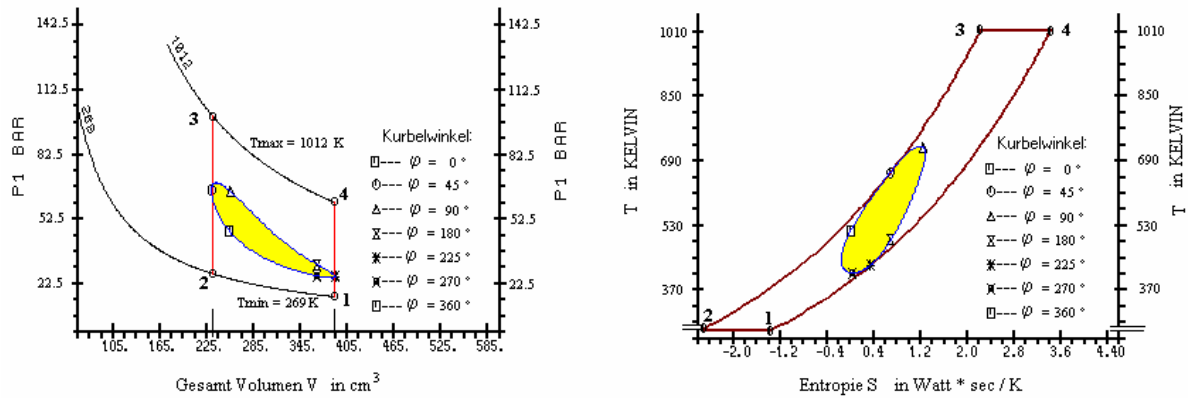
Dieser Wärmeverlust entsteht durch den Wärmestrom entlang des Zylinders nach außen in Richtung Temperaturgefälle.

- *Dissipation durch Arbeitsgas- und Druckverlust*
- *Adiabatikverluste*

Dieser Verlust tritt bei Stirlingmaschinen mit einer Nenndrehzahl von mehr als 200 U/min verstärkt auf. Die Kompression und Expansion laufen dabei so schnell ab, dass der Wärmefluss, der für eine Isothermie nötig wäre, nicht mehr Schritt halten kann. Ergebnis ist der Druckanstieg bei der Kompression bzw. ein steiler Druckabfall bei der Expansion.

Das macht sich im p-V-Diagramm wie folgt bemerkbar:





**Fig. 10** P-V Diagramm und T-S Diagramm des GPU-3 Stirlingmotors  
Die Isothermen sind jeweils die maximal und minimal Temperaturen  $T_{max} = 1012\text{ K}$ ,  $T_{min} = 269\text{ K}$

aus <http://www.stirling-fette.de/prozess.htm#A4>

Achtung: Die Punkte in der Grafik sind anders durchnummeriert und gelten für andere Temperaturen. Die Gründe für die Abweichung des realen vom idealen Prozess sind aber ersichtlich.

Annahme: Es wird laut Aufgabenstellung von 1/3 Verluste im Zylinder ausgegangen, also der innere Wirkungsgrad  $\eta_i = 67\%$

$$P_{th} = P_o \cdot \eta_i = 0,15\text{ W} \cdot 0,67 = 0,1\text{ W} \quad [22]$$

Von dieser Leistung gehen weiter die mechanischen Verluste ab, wie Lager-Reibung, Luftreibung usw.

Hier fehlen Anhaltswerte für den mechanischen Wirkungsgrad des Modells

Zu 12.) Welche Wärme wird der Tasse vom Modell während seiner Laufzeit entzogen in kJ

Dem Modell muss pro Umdrehung  $q_{zu} = 6,086\text{ J/U}$  zugeführt werden (siehe aus [19] Abschnitt 8). Diese Wärmemenge wird der Tasse Tee entzogen.

$$Q_{zu} = q_{zu} \cdot n \cdot t_L$$

$$Q_{zu} = 6,086\text{ J/U} \cdot 150\text{ U/min} \cdot 30\text{ min} = 27387\text{ J}$$

Es werden also  $Q_{zu} = 27,387\text{ kJ}$  zugeführt. [23]

Zu 13.) Welche Endtemperatur herrscht am Ende der Laufzeit in der Tasse in °C

Die innere Wärme-Energie des Wassers im Tee (bezogen auf 0°C) beträgt:

$$U = m_w \cdot c_w \cdot \Delta T$$

$$U = 0,42\text{ kg} \cdot 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 100\text{ K} = 175,98\text{ kJ} [24]$$

Davon wurden  $Q_{zu} = 27,387\text{ kJ}$  entzogen (siehe aus [23] Abschnitt 12)

Also ist die Restwärme  $Q_{\text{Rest}} = U - Q_{\text{zu}} = 175,98\text{kJ} - 27,38\text{kJ} = 148,6\text{kJ}$  [25]

Folglich beträgt die Rest-Temperatur  $\Delta T_{\text{Rest}}$  in der Tasse Tee

$$Q_{\text{Rest}} = m_w * c_w * \Delta T_{\text{Rest}} \longrightarrow \Delta T_{\text{Rest}} = \frac{Q_{\text{Rest}}}{m_w * c_w}$$
$$\Delta T_{\text{Rest}} = \frac{148,6\text{kJ}}{0,42\text{kg} * 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} * \text{K}}} = 84,44\text{K} [26]$$

Da die Berechnung auf  $0^\circ\text{C}$  bezogen wurde, herrscht in der Tasse noch eine Resttemperatur von  $84,44^\circ\text{C}$  (ohne sonstige Verluste)

Zu 14) Wie verändert sich die abgegebene theoretische thermische Leistung des Modells, wenn einige Parameter verändert werden. Für die Parameter kommen in Frage:

- Die obere Temperatur  $T_o$
  - Die untere Temperatur  $T_u$
  - Der Hauptzylinderdurchmesser
  - usw
- e) Lösung: siehe die beiliegende Excel-Tabelle. Exemplarisch ist nur Punkt 14a) „Die obere Temperatur  $T_o$ “ durchgeführt worden.

### Links-Prozess als Arbeitsmaschine

Vorbemerkung: Wenn das Modell von außen angetrieben wird und dabei den Kreisprozess links herum durchläuft bedeutet das beginnend bei 1

- von 1 nach 4 eine isochore Abkühlung von  $T_o$  nach  $T_u$  also Wärmeabgabe (-)
- von 4 nach 3 eine isotherme Expansion mit  $T_u = \text{const.}$  also Wärmezufuhr (+)
- von 3 nach 2 eine isochore Erwärmung von  $T_u$  nach  $T_o$  also Wärmezufuhr (+)
- von 2 nach 1 eine isotherme Kompression mit  $T_o = \text{const.}$  also Wärmeabgabe (-)

Die Vorgänge von 2 nach 1 und von 1 nach 4 finden am Boden des Modells statt. Dort herrscht am Boden immer Wärmeabgabe (wie eine Heizplatte). Also erwärmt der Boden des Modells die Umgebung. Das ist ein Merkmal für eine Wärmepumpe, die die Umgebung aufheizen soll-

15.) Wie groß ist dann die spezifische Kreisprozessarbeit in  $\text{Nm/U}$

Wegen der inneren Verluste ist bei der Arbeitsmaschine die theoretische Leistung kleiner als die zugeführte von  $P_{\text{zu}} = 10\text{W}$ , als

$$P_o' = P_{\text{zu}} * \eta_i$$

$$P_o' = 10\text{W} * 0,67 = 6,7\text{W} [27]$$

Die spezifische Kreisprozessarbeit  $w$  ist dann

$$w' = \frac{Po'}{n}$$

$$w' = \frac{0,268 \frac{Nm}{s}}{150 \frac{\text{min} * \frac{60s}{\text{min}}}{\text{min}}} = 0,1072 \frac{Nm}{U} [28]$$

Zu 16.) Wie hoch sind dann die Drücke p1 und p2 in bar und die Temperatur To in °C (Tu und p3 und p4 bleiben aus Aufg.4) gleich)  
Da laut Aufgabenstellung p3, p4 und Tu gleich bleiben ist

T3 aus [9]; V3 aus [2]; V4 aus [1]

mit  $w' = w'_{12} + w_{34} \rightarrow w'_{12} = w' - w_{34}$

$$w'_{12} = 0,1072 Nm/U - (-0,256 Nm/U) = 0,3637 Nm/U [29]$$

$$w'_{12} = p'_1 * V_1 * \ln \frac{V_2}{V_1} \rightarrow p'_1 = \frac{w'_{12}}{V_1 * \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

$$p'_1 = \frac{0,3637 \frac{Nm}{U}}{95,505 * 10^{-6} m^3 * \ln \frac{98,018 cm^3}{95,505 cm^3}} = 146625,295 Pa = 1,4663 bar [30]$$

(also ca 0,46bar Überdruck, könnte für das Kartonmodell kritisch werden)

mit m aus [17]; w12 aus [29]; V1 aus [1]; V2 aus [2] wird

$$w'_{12} = m * R_L * T'_1 * \ln \frac{V_2}{V_1} \rightarrow T'_1 = \frac{w'_{12}}{m * R_L \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

$$T'_1 = \frac{0,3637 \frac{Nm}{U}}{0,1135 * 10^{-3} kg * 287,14 \frac{Nm}{kg * K} * \ln \frac{98,018 cm^3}{95,505 cm^3}} = 429,6121 K \rightarrow \vartheta_1 = 156,612^\circ C [31]$$

(wäre für den Kleber schon recht heiß)  
der neue Druck p'2 wird bei der Isothermen

$$\frac{p'_1 * V_1}{T_1} = \frac{p'_2 * V_2}{T_2} = \frac{p'_1 * V_1}{T_1} = \frac{p'_2 * V_2}{T_2} \rightarrow p'_2 = \frac{p'_1 * V_1}{V_2}$$

$$p'_2 = \frac{1,4662 bar * 95,505 cm^3}{98,018 cm^3} = 1,429 bar [32]$$

Zu17. Was für eine Arbeitsmaschine liegt dann vor, eine Wärmepumpe oder eine Kältemaschine

Antwort: Es liegt eine Wärmepumpe vor.

Begründung:

Für den Boden, d.h. die untere Platte des Modells (Warmezone) sind die Zustände von 4 nach 1 und von 1 nach 2 wichtig. Bei dem Links-Prozess wird von 2 nach 1 das Arbeitsgas komprimiert. Dabei will es sich i.a. das Gas erwärmen. Da eine isotherme Kompression gefordert wird, muss das Arbeitsgas während der Kompression gekühlt werden und die dadurch anfallende Wärme wird durch den Boden an die Umgebung abgeführt. Das ist das Merkmal der Wärmepumpe.

Weiterhin muss das Gas auch im isochoren Bereich 1 nach 4 gekühlt werden um bei gleichem Volumen von der hohen Temperatur von hier 156°C auf die niedrige von 30°C zu kommen. Auch hier wird die anfallende Wärme durch die Bodenplatte an die Umgebung abgegeben.

Also gibt die Bodenplatte Wärme an die Umgebung ab und erwärmt sie. Das ist das Merkmal der Wärmepumpe, die Wärme aus einer anderen Umgebung aufnimmt (hier der Deckel des Hauptzylinders) um sie danach an einer anderen Stelle ( hier der Boden) zusammen mit der zugeführten Kreisprozessarbeit wieder abzugeben..

18. Wie groß ist die abgegeben bzw. aufgenommene spezifische Wärmemenge in J/U.

An zwei Stellen wird vom Arbeitsgas Wärme aufgenommen

Bei der Expansion von 3 nach 4 am Deckel des Modells

Diese Werte sind die gleichen wie früher und wurden aus [12] Abschnitt 5 bereits berechnet mit  $q_{34} = 0,256 \text{ J/U}$  (hier positiv, da Wärmeaufnahme)

Bei der isochoren Erwärmung des Arbeitsgases von 3 nach 2 also von  $T_u = 30^\circ\text{C}$  auf  $T_o = 156,6^\circ\text{C}$ .

Mit  $m$  aus [17] und  $c_v$  aus [16]

$$q'_{23} = m * c_v * (T_o' - T_u)$$

$$q'_{23} = 0,00011352 \text{ kg} * 716,05985 \frac{\text{J}}{\text{kg} * \text{K}} * (156,6 - 30) \text{ K} = 10,291 \frac{\text{J}}{\text{U}}$$

Folglich ist die spezifische Wärmeaufnahme  $q'_{zu} = q'_{23} + q_{34}$

$$q'_{zu} = 10,291 \text{ J/U} + 0,256 \text{ J/U} = 10,548 \text{ J/U}$$

Beide Wärmeaufnahmen erfolgen am Deckel des Modells

An zwei Stellen wird vom Arbeitsgas Wärme abgegeben

Bei der Kompression von 2 nach 1 am Boden des Modells

Diese Werte sind die gleichen wie früher und wurden aus [29] unter Abschnitt 16 bereits berechnet mit  $q'_{12} = 0,-3637 \text{ J/U}$  (hier negativ, da Wärmeabgabe)

Bei der isochoren Abkühlung des Arbeitsgases von 1 nach 4 von  $T'o=156,6^\circ\text{C}$  auf  $Tu=30^\circ\text{C}$  ist.

Mit  $m$  aus [17] und  $c_v$  aus [16]

$$q'_{14} = m * c_v * (T'o - Tu)$$

$$q'_{14} = 0,00011352\text{kg} * 716,05985 \frac{\text{J}}{\text{kg} * \text{K}} * (30 - 156,6)\text{K} = -10,291 \frac{\text{J}}{\text{U}}$$

$$\text{also } -q'_{14} = q'_{12} = -10,291 \text{ J/U [34]}$$

Folglich ist die spezifische Wärmeabgabe  $q'_{ab}=q'_{12}+q'_{34}$

$$q'_{ab}=-10,291 \text{ J/U} + (-0,3637 \text{ J/U}) = -10,655 \text{ J/U [35]}$$

Beide Wärmeabgaben erfolgen am Boden des Modells

19. Wie groß ist die abgegeben bzw. aufgenommene Wärmemenge während der gesamten Laufzeit des Modells?

Mit  $q'_{zu}$  aus [33] und  $q'_{ab}$  aus [35] wird

$$Q'_{zu}=q'_{zu} * n * t_L = 10,548 \text{ J/U} * 150 \text{ U/min} * 30 \text{ min} = 47467 \text{ J} = 47,467 \text{ kJ [36]}$$

$$Q'_{ab}=q'_{ab} * n * t_L = -10,655 \text{ J/U} * 150 \text{ U/min} * 30 \text{ min} = -47949,5 \text{ J} = -47,949 \text{ kJ}$$

**Kontrolle:** Die Differenz der zu- und abgeführten Wärmen beträgt

$$\Delta Q = 47949,5 \text{ J} - 47467 \text{ J} = 482,5 \text{ J} = 482,5 \text{ Nm.}$$

Diese Differenz ergibt sich aus der zugeführten mechanischen Leistung

$$\Delta W = P'o * t_L = 0,268 \text{ Nm/s} * 30 * 60 \text{ s} = 482,4 \text{ J}$$

Die Fragen 20 bis 24 werden im Zusammenhang beantwortet:

Rechtsprozess als Arbeitsmaschine (Durchlauf des Kreisprozesses im Uhrzeigersinn)

Vorbemerkung: Wenn das Modell von außen angetrieben wird und dabei den Kreisprozess rechts herum durchläuft bedeutet das beginnend bei 1

- a) von 1 nach 2 eine isotherme Expansion mit  $T_o=\text{const.}$  also Wärmezufuhr (+)
- b) von 2 nach 3 eine isochore Abkühlung von  $T_o$  nach  $T_u$  also Wärmeabgabe (-)
- c) von 3 nach 4 eine isotherme Kompression mit  $T_u=\text{const.}$  also Wärmeabgabe (-)
- d) von 4 nach 1 eine isochore Erwärmung von  $T_u$  nach  $T_o$  also Wärmezufuhr (+)

Die Vorgänge von 4 nach 2 finden am Boden des Modells statt. Dort herrscht am Boden immer Wärmeaufnahme für das Arbeitsgas. Diese Wärme holt sich die Bodenplatte aus der Umgebung. (wie eine Kühlplatte). Also kühlt der Boden des Modells die Umgebung ab. Das ist ein Merkmal für eine Kältemaschine, die die Umgebung abkühlen soll.

Wenn sich die Daten nicht ändern, verändern sich bis auf die Vorzeichen auch nicht die Ergebnisse.  
Im Einzelnen sind dann

Zu 20) die spezifische Kreisprozessarbeit  $w'' = 0,1072 \text{ Nm/U}$  aus [18]

Zu 21) Drücke  $p_1 = 1,466 \text{ bar}$  aus [30];  $p_2 = 1,429 \text{ bar}$  aus [32];  $T_0 = 429,61 \text{ K} = 156,612^\circ \text{C}$  aus [31]

Zu 22) Es liegt eine Kältemaschine vor

**Begründung:**

Für den Boden, d.h. die untere Platte des Modells (Warmezone) sind die Zustände von 4 nach 1 und von 1 nach 2 wichtig. Bei dem Rechts-Prozess wird von 1 nach 2 das Arbeitsgas expandiert. Dabei will es sich i.a. das Gas abkühlen. Da eine isotherme Expansion gefordert wird, muss das Arbeitsgas während der Expansion erwärmt werden und die dadurch notwendige Wärme wird durch den Boden von der Umgebung aufgenommen. Das ist das Merkmal der Kältemaschine.

Weiterhin muss das Gas auch im isochoren Bereich 4 nach 1 erwärmt werden um bei gleichem Volumen von der niedrigeren Temperatur von hier  $30^\circ \text{C}$  auf die höhere von  $156^\circ \text{C}$  zu kommen. Auch hier wird die notwendige Wärme durch die Bodenplatte aus der Umgebung aufgenommen.

Also nimmt die Bodenplatte Wärme von der Umgebung auf und kühlt sie. So wird der Umgebung Wärme entzogen. Das ist das Merkmal der Kältemaschine, die Wärme an einer Seite aufnimmt ( hier der Boden) und an anderer Umgebung zusammen mit der zugeführten Kreisprozessarbeit abgibt (hier der Deckel des Hauptzylinders)

Zu 23. die spez. Wärmezufuhr am Boden des Modells ist

$$q''_{\text{zu}} = 10,291 \text{ J/U} + 0,256 \text{ J/U} = 10,548 \text{ J/U} \text{ aus [33]}$$

die spez. Wärmeabfuhr am Deckel des Modells ist

$$q''_{\text{ab}} = -10,291 \text{ J/U} + (-0,3637 \text{ J/U}) = -10,655 \text{ J/U} \text{ aus [35]}$$

24. die abgegeben bzw. aufgenommene Wärmemenge während der gesamten Laufzeit des Modells?

$$Q''_{\text{zu}} = q''_{\text{zu}} * n * t_L = 10,548 \text{ J/U} * 150 \text{ U/min} * 30 \text{ min} = 47467 \text{ J} = 47,467 \text{ kJ}$$

(Vergleiche mit [36] )

$$Q''_{\text{ab}} * n * t_L = -10,655 \text{ J/U} * 150 \text{ U/min} * 30 \text{ min} = -47949,5 \text{ J} = -47,949 \text{ kJ}$$

(Vergleiche mit [37] )

Kontrolle: Die Differenz der zu- und abgeführten Wärmen auch hier beträgt

$$\Delta Q'' = 47949,5 \text{ J} - 47467 \text{ J} = 482,5 \text{ J} = 482,5 \text{ Nm.}$$

Diese Differenz ergibt sich auch hier aus der zugeführten mechanischen Leistung

$$\Delta w'' = P''_o \cdot t_L = 0,268 \text{ Nm/s} \cdot 30 \cdot 60 \text{ s} = 482,4 \text{ J}$$

(Vergleiche mit [38] )

Formelzeichen	Bedeutung	Maßeinheit
OT	oberer Totpunkt des Arbeitskolbens	
UT	unterer Totpunkt des Arbeitskolbens	
r	Kurbelwellen-Radius	mm
s	= 2 x r Kolbenhub	mm
V <sub>1</sub>	Volumen des eingeschlossenen Gases im Punkt 1 (unterer Totpunkt UT) bei oberer Temperatur T <sub>o</sub>	cm <sup>3</sup>
V <sub>Haupt</sub>	Volumen des Gases im Hauptzylinder	cm <sup>3</sup>
V <sub>Arb</sub>	Volumen des Gases im Arbeitszylinder	cm <sup>3</sup>
V <sub>Arb,UT</sub>	Volumen des Gases im Arbeitszylinder mit Arbeitskolben in UT	cm <sup>3</sup>
V <sub>Arb,OT</sub>	Volumen des Gases im Arbeitszylinder mit Arbeitskolben in OT	cm <sup>3</sup>
V <sub>Zyl</sub>	Volumen des Hauptzylinders	cm <sup>3</sup>
V <sub>Verd</sub>	Volumen des Verdrängerkolbens	cm <sup>3</sup>
D	Durchmesser des Hauptzylinders	mm
h <sub>Zyl</sub>	Höhe des Hauptzylinders	mm
h <sub>Verd</sub>	Höhe des Verdrängerkolbens	mm
d	Durchmesser des Arbeitskolbens	mm
h <sub>Arb,UT</sub>	Höhe des Arbeitskolbens im unteren Totpunkt vom Fußpunkt des Arbeitszylinders gemessen	mm
h <sub>Arb,OT</sub>	Höhe des Arbeitskolbens im oberen Totpunkt vom Fußpunkt des Arbeitszylinders gemessen	mm
ε	Verdichtungsverhältnis	
θ <sub>L</sub>	Raumtemperatur in °C	°C
θ <sub>O</sub>	hohe Betriebs-Temperatur in der warmen Zonen in °C = T <sub>o</sub>	°C
θ <sub>u</sub>	niedrige Betriebs-Temperatur in der kalten Zonen in °C = T <sub>u</sub>	°C
T <sub>L</sub>	Raumtemperatur in K	K
T <sub>O</sub>	hohe Betriebs-Temperatur in der warmen Zonen in K = T <sub>o</sub>	K
T <sub>U</sub>	niedrige Betriebs-Temperatur in der kalten Zonen in K = T <sub>u</sub>	K
p <sub>L</sub>	Luftdruck der Umgebung	bar
p <sub>1..4</sub> , V <sub>1..4</sub> , T <sub>1..4</sub>	Zustandsrößen absoluter Druck, Volumen des Arbeitsgases und thermodynamische Temperaturen in den Prozesspunkten 1 bis 4	bar cm <sup>3</sup> K
w <sub>12</sub>	Gasarbeit beim Verlauf von Punkt 1 nach Punkt 2 pro Umdrehung	Nm/U
w <sub>34</sub>	Gasarbeit beim Verlauf von Punkt 3 nach Punkt 4 pro Umdrehung	Nm/U
w	theoretisch nutzbare Kreisprozessarbeit bei jeder Umdrehung: w = w <sub>12</sub> + w <sub>34</sub>	Nm/U
P <sub>o</sub>	theoretisch abgegebene Leistung	W
m	Masse des eingeschlossenen Arbeitsgases	g
c <sub>v</sub>	spez. Wärmekapazität der Luft bei Konst. Volumen	kJ/(kg*K)
R <sub>L</sub>	Gaskonstant für Luft R <sub>L</sub> =287,14	J/(kg*K)
κ	Kapazitätsverhältnis bei Luft 1,401	
q <sub>12</sub>	zugeführte Wärme pro Umdrehung von 1 nach 2 (isotherme Expansion)	J/U
q <sub>41</sub>	zugeführte Wärme pro Umdrehung von 4 nach 1 (isochore Wärmezufuhr)	J/U
q <sub>zu</sub>	gesamte zugeführte Wärme pro Umdrehung	J/U
q <sub>ab</sub>	gesamte abgeführte Wärme pro Umdrehung	J/U



$\eta_{th}$	thermisch theoretischer Wirkungsgrad bei vollständiger Absolvierung des Kreisprozesses	%
$\eta_{Carnot}$	thermisch theoretischer Wirkungsgrad beim Carnot-Prozess	%
$\eta_i$	innere Wirkungsgrad, der die Verluste im Zylinder-Inneren erfasst	%
$P_{th}$	abgegebene thermische Leistungsabgabe, $P_o$ und Berücksichtigung innerer Verluste im Zylinder	W
$Q_{zu}$	zugeführte Wärme zum Modell aus der Tee-Tasse während der Laufzeit	kJ
$Q_{ab}$	abgeführte Wärme vom Modell an die Umwelt (am Deckel) während der Laufzeit	kJ
$t_L$	Laufzeit des Modells	min
$n$	Drehzahl des Modells	U/min
$U$	Innere Energie des Wasser in der Teetasse	kJ
$Q_{Rest}$	Restwärme in der Teetasse nach Ablauf der Betriebszeit	kJ
$\Delta T_{Rest}$	Rest-Temperatur von $0^\circ\text{C}$	$^\circ\text{C}$
$p_n$	Normdruck = 1013mbar	mbar
$m_w$	Wassermasse in der Tasse	kg
$c_w$	spezifische Wärme von Wasser $c_w = 4,19\text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$	$\text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
$P_{zu}$	zugeführte Leistung vom äußeren E-Motor	W
$\Delta Q$	Wärmemengendifferenz von $Q_{zu}$ und $Q_{ab}$	kJ
$x'$	alle Werte neu, nur jetzt als Links-Prozess	
$x''$	alle Werte neu, nur jetzt als Rechts-Prozess	